# 10. Konfidenzintervall fü μ



Das arithmetische Mittel $\bar{x}$ einer Stichprobe ist ein Schätzer für den Erwartungswert μ der Grundgesamtheit. Als sogenannte Punktschätzung enthält $\bar{x}$ keine Angaben darüber, wie genau diese Schätzung ist. Wir können also z.B. nicht sagen, dass $\bar{x}$ mit 90%iger Wahrscheinlichkeit in der Nähe von μ liegt. Aus $\bar{x}$ und $s_x$ können wir das Toleranzintervall $TI = \bar{x} \pm s_x$, den einfachen Streubereich berechnen, von dem wir bei stetigen, normalverteilten Daten wissen, dass in ihm ca. 68% aller Daten der untersuchten hinreichend großen Stichprobe liegen. Eine Aussage über die Güte der Schätzung von $\bar{x}$ für μ ergibt sich aber auch aus dieser Spanne nicht.
Zur Präzisierung der Schätzung können wir folgende Überlegungen anstellen: $\bar{x}$ einer Stichprobe ist in der Regel nicht numerisch gleich μ (Kapitel 2 Stichprobenfehler $e = \bar{x} - \mu$). Wir gehen aber davon aus, dass der Erwartungswert μ in der „näheren" Umgebung von $\bar{x}$ liegt. Um diese „nähere Umgebung" einzugrenzen, hat es sich als zweckmäßig erwiesen, ein Intervall, das sogenannte Konfidenzintervall um $\bar{x}$ zu berechnen, in dem μ mit einer vorgegebenen, frei wählbaren Wahrscheinlichkeit liegt. Der Gedanke dazu wurde von dem polnischen Mathematiker Jerzy Neyman entwickelt.

> Ein Konfidenzintervall (KI) ist ein Bereich um einen Schätzwert in dem der Erwartungswert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit, der Konfidenzwahrscheinlichkeit (KW) liegt.
> (KI = Konfidenzbereich = Vertrauensbereich)

Konfidenzintervalle können für verschiedene Parameter der Lage und der Variation berechnet werden. Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit dem Konfidenzintervall für μ.

Während das Toleranzintervall (TI) nach $\boxed{TI = \bar{x} \pm s_x}$ berechnet wird,

ersetzen wir zur Berechnung des Konfidenzintervalls die Standardabweichung $s_x$ durch den Standardfehler des Mittelwertes $s_{\bar{x}}$ und erhalten

$$\boxed{KI = \bar{x} \pm s_{\bar{x}}}$$

Nach dem *Zentralen Grenzwertsatz* sind die Mittelwerte vieler Stichproben ($\bar{x}_{St1}$ bis $\bar{x}_{Stn}$) einer Grundgesamtheit bei hinreichend großer Stichprobe normalverteilt. Daraus haben wir in Kapitel 5 abgeleitet, dass folgendes gilt:

Im Intervall $\bar{x} \pm \mathbf{1} * s_{\bar{x}}$ liegen 68,28 % aller Mittelwerte
$\bar{x} \pm \mathbf{2} * s_{\bar{x}}$ liegen 95,5 % aller Mittelwerte.
$\bar{x} \pm \mathbf{3} * s_{\bar{x}}$ liegen 99,8 % aller Mittelwerte.
($\bar{x}$ steht hier für das arithmetische Mittel der Stichprobenmittelwerte ($\bar{x}_{St1}$ bis $\bar{x}_{Stn}$)

Daraus leiten wir ab:
Im Bereich $\bar{x} \pm \mathbf{1} * s_{\bar{x}}$ liegt μ mit 68,28 %iger Wahrscheinlichkeit.
$\bar{x} \pm \mathbf{2} * s_{\bar{x}}$ liegt μ mit 95,5 %iger Wahrscheinlichkeit.
$\bar{x} \pm \mathbf{3} * s_{\bar{x}}$ liegt μ mit 99,8 %iger Wahrscheinlichkeit.

Die folgenden Berechnungen des Konfidenzintervalls setzen stetige, mindestens approximiert normalverteilte Daten voraus.

## 10.1 Berechnung des Konfidenzintervalls über die z-Tabelle nach $\boxed{KI = \bar{x} \pm z * s_{\bar{x}}}$

Voraussetzungen: Die Daten sind zumindest approximiert normalverteilt.
Die Varianz $\sigma^2$ in der Grundgesamtheit ist bekannt, oder $s_x^2$ ist aufgrund einer sehr großen Stichprobe ein hinreichend guter Schätzer für $\sigma^2$.

Im Folgenden gilt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass μ im geschlossenen Konfidenzintervall [a;b] liegt, nennen wir Konfidenzwahrscheinlichkeit KW = 1-α.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass μ außerhalb der Grenzen des KI liegt, nennen wir die Irrtumswahrscheinlichkeit IW = α.
[a;b] ist ein geschlossenes Intervall, d.h. die Grenzen gehören zum Intervall.

<u>Nach welchen Gesichtspunkten wird die KW ausgewählt?</u>
Eine wesentliche Frage ist, welchen Wert wir für die Konfidenzwahrscheinlichkeit 1-α wählen, welchen Sicherheitsmaßstab wir also für die Aussage zu den Grenzen des KI anlegen wollen. Die Antwort hängt davon ab, welche Folgen mögliche Fehleinschätzungen haben können. Für medizinisch-naturwissenschaftliche Fragen wurden für 1-α die Werte 95%, 99% und 99,9% willkürlich festgelegt, wobei Abweichungen möglich sind. Näheres hierzu folgt in der Inferenzstatistik.

**Beispiel 1**
Uns liegt im Gedankenexperiment eine normalverteilte Grundgesamtheit mit der Varianz $\sigma^2$ = 25 vor. Wir entnehmen dieser Grundgesamtheit 70 Stichproben gleichen Umfangs. Die 70 arithmetischen Mittel ($\bar{x}_{St1}$ bis $\bar{x}_{St70}$) der 70 Stichproben mitteln wir wiederum arithmetisch, erhalten den Wert $\bar{x}_{ges}$ = 45 und stellen die Frage: Welches sind die Grenzen des Intervalls um den gemeinsamen Mittelwert ($\bar{x}_{ges}$ = 45), in denen mit der Konfidenzwahrscheinlichkeit 95,5 % (= 0,955) der Erwartungswert μ (der Mittelwert der Mittelwerte aller denkbaren Stichproben aus der Grundgesamtheit) liegt? Die Begründung für die Wahl des <u>un</u>üblichen Wertes 95,5% folgt gleich.

Wir berechnen das KI für 95,5%ige KW nach

$$KI = \bar{x} \pm z * s_{\bar{x}}$$

Den Faktor z ersetzen wir zunächst durch den Wert 2, weil μ mit 95,5%iger Wahrscheinlichkeit innerhalb des 2-fachen Streubereichs liegt, siehe oben.

Also $KI = \bar{x} \pm 2 * s_{\bar{x}}$
Berechnung von $s_{\bar{x}}$ $s_{\bar{x}} = \sqrt{(\sigma^2/n)} = \sqrt{(25/70)} = 0{,}6$ (gerundet)

KI = 45 ± 2 * 0,6
KI = 45 ± 1,2
<u>KI = 43,8 bis 46,2</u>

Wir stellen fest: Das Konfidenzintervall [43,8;46,2] enthält mit der Konfidenzwahrscheinlichkeit 1-α = 0,955 den Erwartungswert μ. Da IW + KW = 1, liegt μ mit der IW α = 0,005 außerhalb dieser Grenzen. Das bedeutet, mit der IW α/2 = 0,0025 liegt μ unterhalb der unteren KI-Grenzen und mit der IW α/2 = 0,0025 oberhalb der oberen KI-Grenze. (Abb.1)

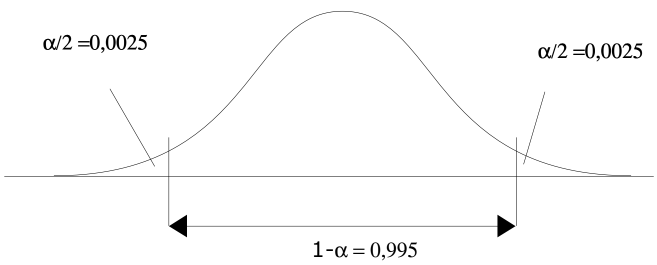


Abb.1

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| α/2 | + | α/2 | + | 1-α | = | 1 |
| 0,0025 | + | 0,0025 | + | 0,995 | = | 1 |

**Ermittlung der Faktoren für 95%; 99% und 99,9%**
Wir haben das Konfidenzintervall für die unübliche KW 1-$\alpha$ = 0,955 berechnet und suchen jetzt (statt des Faktors 2) die Faktoren für die 1-$\alpha$-Werte 0,95; 0,99 und 0,999.

Zur Berechnung des KI für die üblichen KW gelten also folgende Gleichungen, wobei $\alpha$ verschiedene Werte annimmt.

KI = $\bar{x}$ ± Faktor für 1 - $\alpha$ = 95% * $s_{\bar{x}}$
KI = $\bar{x}$ ± Faktor für 1 - $\alpha$ = 99% * $s_{\bar{x}}$
KI = $\bar{x}$ ± Faktor für 1 - $\alpha$ = 99,9% * $s_{\bar{x}}$

Wir kennen aus der Normalverteilung diese Faktoren:

Faktor 1 für 68,28%,
Faktor 2 für 95,5% und
Faktor 3 für 99,8%

Die Faktoren 1, 2, 3 entsprechen den z-Werten der standardisierten NV für den einfachen, zweifachen und dreifachen Streubereich (Abb.2). Wir werden die gesuchten Faktoren daher mit Hilfe der z-Tabelle ermitteln, die in Lehrbüchern und im Internet zu finden ist. Zur Erinnerung: Bei der standardisierten NV entspricht die obere Grenze des einfachen Streubereichs dem Wert z=1, die untere z=-1. Der oberen Grenze des doppelten Streubereichs entspricht z=2 und die des dreifachen Streubereichs z=3. Der Faktor für 95,5% ist 2, der für 68,28% ist 1. Der Faktor für 95% muss also zwischen z=1 und z=2 liegen. (Abb.2)

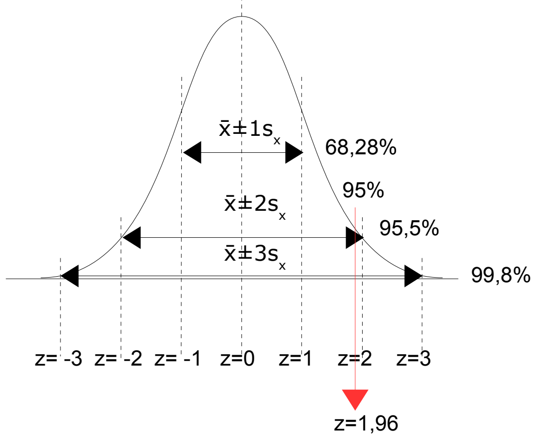


Abb. 2

## Auszug aus einer z-Tabelle

| z\ * | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 2.Nachkommastelle des z-Wertes |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0* | 0.50000 | 0.50339 | 0.50798 | 0.51197 | 0.51595 | 0.51994 | 0.52392 | 0.52790 | 0.53118 | 0.53586 | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | |
| 1,9* | 0.97128 | 0.97193 | 0.97257 | 0.97320 | 0.97381 | 0.97441 | **0.97500** | 0.97558 | 0.97615 | 0.97670 | |
| 2,5* | 0.99379 | 0.99396 | 0.99413 | 0.99430 | 0.99446 | 0.99461 | 0.99477 | 0.99492 | **0.99506** | 0.99520 | P-Werte in Teilen von 1 |
| 3,2* | 0.99931 | 0.99934 | 0.99936 | 0.99938 | 0.99940 | 0.99942 | 0.99944 | 0.99946 | 0.99948 | **0.99950** | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | |
| 4,0* | 0.99997 | 0.99997 | 0.99997 | 0.99997 | 0.99997 | 0.99997 | 0.99998 | 0.99998 | 0.99998 | 0.99998 | |

Tabelle 1

## Hinweise zur Handhabung der z-Tabelle

* In Tabelle 1 sind die Werte farbig gekennzeichnet, mit denen die Faktoren für die 1-α-Werte 95%; 99% und 99,9% ermittelt werden können.
* Die 1-α-Werte entsprechen den P-Werten der Tabelle.
* Die Fläche unter der Kurve (Abb.2) ist symmetrisch um den Wert z=0 verteilt, das bedeutet, dass die z-Werte links die gleichen sind wie rechts, nur negativ (Abb.2).
* Die z-Tabelle enthält daher nur die P-Werte ab der Mitte (z=0 ≙ P=0,5) nach rechts bis z=4,09 ≙ P=0,9998. P=1 wird nicht erreicht, da der Kurvenverlauf asymptotisch ist.
* Die links liegenden, negativen Werte sind nicht eingetragen.
* Das Sternchen (*) hinter den z-Werten in Spalte (Zeile) 1 steht für den Wert der zweiten Nachkommastelle des z-Wertes, der in der jeweiligen (1.Spalte) Spaltenüberschrift angegeben ist.
* In verschiedenen Literaturstellen finden wir unterschiedliche Darstellungen der z-Tabelle, die dann gegebenenfalls zu andere Vorgehensweisen, aber letztlich alle zu gleichen Ergebnis führen.

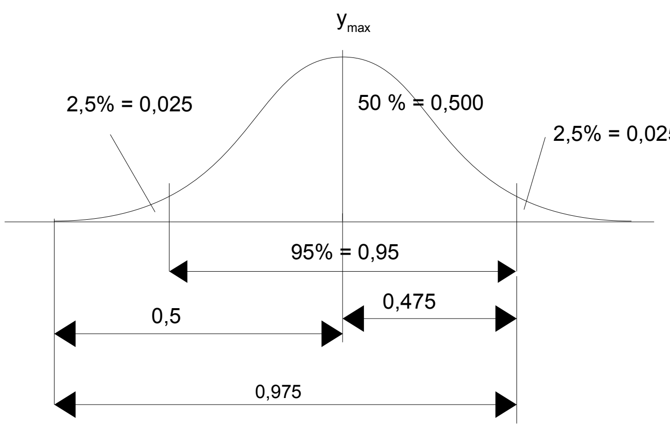


Abb.3

1. Wir wollen das KI für P = 95% = 0,95 berechnen.

2. Die mittleren 95 % der Fläche unter der Kurve verteilen sich symmetrisch um das Lot unter $y_{max}$. (Abb.3)
3. Oberhalb und unterhalb der KI-Grenzenliegen also je 2,5% (0,025).
4. Die Tabellenwerte für P beginnen bei 0,500 und gehen bis nahe 1.
5. Von 0,500 bis 0,025 ist die Differenz 0,475. (Abb.3)
6. Dazu werden die links von $y_{max}$ liegenden 50 % (0,5) addiert. Das ergibt 0,975. (97,5% der Fläche unter der Kurve)
7. Die obere Grenze des KI liegt also bei 0,975. Wegen der Symmetrie der Kurve brauchen wir den unteren Grenzwert nicht zu berechnen.
8. Wir suchen jetzt bei der P-Werten in der Tabelle den Wert 0,975.
9. Er steht in Zeile 4, Spalte 8. In der Kopfzeile steht über 0,975 eine 6.
10.Diese 6 wird als zweite Nachkommastelle für das * im z-Wert gesetzt.
11. Der z-Wert 1,9* steht links neben 0,975 in Spalte 1.
13. Der z-Wert für 95 % ist also 1,96.
14. Auf dem gleichen Wege finden Sie Faktor z = 2,58 für 99% und Faktor z = 3,29 für 99,9%.

Nun können wir die Grenzen für das Konfidenzintervall für die KW 95% berechnen. Dazu ersetzen wir den Term *Faktor für 1-α durch $z_{1-\alpha}$*

$KI = \bar{x} \pm \text{Faktor für } 1\text{-}\alpha * s_{\bar{x}}$
$KI = \bar{x} \pm z_{1-\alpha} * s_{\bar{x}}$
$KI = 45 \pm 1{,}96 * 0{,}6$
KI = 43,82 bis 46,18

Das bedeutet:
Wir haben das KI mit den Grenzen 43,82 und 46,18 berechnet. Die Werte, entsprechend gerundet, entsprechen den Werten, die wir für die KW 95,5 % erhalten haben. Das ist verständlich, da die Differenz von 95,5% bis 95,0% relativ gering ist.

Die Frage ist jetzt, ob das berechnete Intervall in dem Sinne richtig ist, als dass der Erwartungswert μ auch wirklich in ihm liegt. Ist das Intervall nicht richtig, dann enthält es den Erwartungswert nicht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das berechnete Intervall richtig ist, dass also der Erwartungswert in ihm liegt, ist 95%. Meist wird das Ergebnis der Berechnung so formuliert: Mit 95%iger Wahrscheinlichkeit liegt der Erwartungswert μ in dem Intervall [43,82; 46,18].

Auf dem gleichen Wege erhalten wir

für KW 99% $KI = \bar{x} \pm z_{1-\alpha} * s_{\bar{x}}$
$KI = 45 \pm 2{,}58 * 0{,}6$
$\underline{KI = 43{,}45 \text{ bis } 46{,}55}$

für KW 99,9% $KI = \bar{x} \pm z_{1-\alpha} * s_{\bar{x}}$
$KI = 45 \pm 3{,}29 * 0{,}6$
$\underline{KI = 43{,}03 \text{ bis } 46{,}97}$

**Der Zusammenhang zwischen Konfidenzwahrscheinlichkeit und Breite des Konfidenzintervalls.**

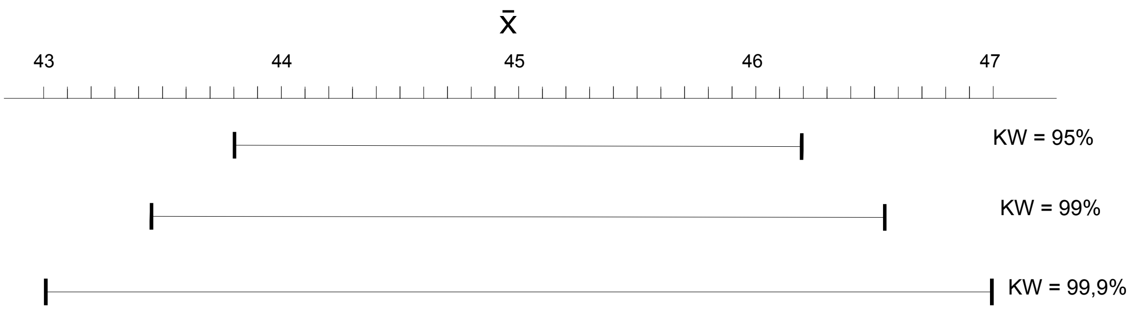


Abb . 4 macht den Zusammenhang zwischen KW und Breite des KI deutlich:

**Mit steigender Konfidenzwahrscheinlichkeit steigt die Breite des Konfidenzintervalls**

**KW⇑ ⇒ KI⇑**

**Sichere Aussagen (hohe KW) sind unscharf (große Breite)**

Bei der Festlegung der Konfidenzwahrscheinlichkeit müssen wir also zwischen zwei Situationen wählen.
1. Wir wählen eine relativ hohe KW und erhalten ein relativ breites Konfidenzintervall, womit wir aber eine wenig präzise Aussage haben.
2. Wir fordern eine relativ präzise Aussage, also ein relativ schmales Konfidenzintervall. Dann müssen wir aber eine relativ geringe Sicherheit (KW) in Kauf nehmen.

Dem Problem entsprechend müssen wir innerhalb vernünftiger Grenzen die KW wählen. (Siehe 10.3)

**Beispiel 2** Nehmen wir an, wir kennten für eine bestimmte Personengruppe die Varianz $\sigma^2 = 0{,}5$ des Durchmessers der Erythrozyten. Wir messen die Durchmesser von insgesamt 150 Erythrozyten einer Person dieser Gruppe. Wir setzen normalverteilte Daten voraus. Das arithmetische Mittel beträgt 7,82 μm. Wie groß ist das Konfidenzintervall für die KW = 99%?

$\boxed{KI = \bar{x} \pm z_{1-\alpha} * s_{\bar{x}}}$
$s_{\bar{x}} = \sqrt{(\sigma^2/n)} = 0{,}058$
$KI = 7{,}82\ \mu m \pm 2{,}58 * 0{,}058\ \mu m$
$KI = 7{,}82\ \mu m \pm 0{,}15\ \mu m$
$\underline{KI = 7{,}67\ \mu m \text{ bis } 7{,}97\ \mu m}$

Das bedeutet: Wir können mit 99%iger Sicherheit davon ausgehen, dass der Erwartungswert μ in dem Intervall 7,67 μm bis 7,97 μm liegt.

Anders formuliert: Mit 99%iger Wahrscheinlichkeit können wir davon ausgehen, dass das berechnete Konfidenzintervall richtig ist, d.h. dass in ihm der Erwartungswert liegt.

Voraussetzung für die Berechnungen der Beispiele 1 und 2 war die Kenntnis der Varianz in der Grundgesamtheit bzw. eine sehr große Stichprobe [oft wird der Wert n > 200 angegeben], damit $s_x^2$ ein hinreichend guter Schätzer für $\sigma^2$ ist. Beides ist in der Realität meist nicht gegeben. Ist die Varianz nicht bekannt und ist die Stichprobe nicht sehr groß, dann berechnen wir das Konfidenzintervall statt über die z-Tabelle über die t-Tabelle.

## 10.2 Berechnung des Konfidenzintervalls

über die t-Tabelle nach $\boxed{KI = \bar{x} \pm t * s_{\bar{x}}}$

Voraussetzung: Die Daten sind normalverteilt.
Die Varianz ist nicht bekannt.
Stichprobengröße n ~≤ 30.

Die t-Tabelle (Signifikanzschranken der Student-Verteilung) wurde von dem englischen Mathematiker William Gosset unter dem Pseudonym Student veröffentlicht. Während bei der z-Tabelle die Faktoren (z) nur von der KW abhängen, sind die Faktoren (t) der t-Tabelle eine Funktion der gewünschten KW und des Stichprobenumfangs. Das KI ist hier also abhängig von 1-α und n. Der *Faktor für 1-α* wird hier durch $t_{\nu,1-\alpha}$ ersetzt.

**Beispiel 3** Die Celluloseacetatfolien-Elektrophorese von n = 21 Rattenseren ergab folgende Werte für die Fraktion der α2-Globuline: $\bar{x}$ = 6,79%; $s_x^2$ = 9. Zu berechnen ist das Konfidenzintervall für die KW 95%. Wir gehen davon aus, dass die Daten zumindest approximiert normalverteilt sind.

$$KI = \bar{x} \pm \text{Faktor für } 1\text{-}\alpha * s_{\bar{x}}$$

$$KI = \bar{x} \pm t_{\nu,1-\alpha} * s_{\bar{x}}$$

$$KI = \bar{x} \pm t * s_{\bar{x}}$$
$$KI = \bar{x} \pm t * \sqrt{(s_x^2/n)}$$
$$KI = \bar{x} \pm t * \sqrt{(9/21)}$$
$$KI = 6{,}79 \pm t * 0{,}65$$

t wird nun über die t-Tabelle ermittelt.

Der Tabellenausschnitt (Tabelle 2) enthält die Faktoren für Stichprobenumfänge von n=2 bis n=31 und die Konfidenzwahrscheinlichkeit 90%, 95%, 99% und 99,9%. Wie bei der z-Tabelle erwähnt, finden wir auch die t-Tabelle in verschiedenen Darstellungen.

Beim Lesen der Tabelle ist folgendes zu beachten:

1. Die hier vorliegende t-Tabelle enthält nicht die KW (1-α) sondern die IW (α).
   Hinter 2P und P (Erklärung weiter unten) sind die IW (α) in Teilen von 1, also nicht in %-Form angegeben.
2. Den Stichprobenumfang (n) finden wir unter dem Zeichen ν (nü) für den Freiheitsgrad. Dabei gilt ν = n-1.

Wir wollen für Beispiel 3 das Konfidenzintervall für 95%ige KW berechnen und gehen dazu im Hinblick auf die t-Tabelle folgendermaßen vor.

# Die t-Tabelle

| 2P | IW | 0.1 | 0,05 | 0,01 | 0,001 | 2P | IW | 0.1 | 0,05 | 0,01 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P | IW | 0.05 | 0,025 | 0,005 | 0,0005 | P | IW | 0.05 | 0,025 | 0,005 | 0,0005 |
| F8 | | | | | | F8 | | | | | |
| 1 | | 6.3138 | *12.7062* | *63,657* | *636,619* | 16 | | 1.7459 | *2,1199* | *2,9208* | *4,015* |
| 2 | | 2.9200 | *4,3027* | *9,9248* | *31,598* | 17 | | 1.7396 | *2,1098* | *2,8982* | *3,965* |
| 3 | | 2.3534 | *3,1825* | *5,8409* | *12,924* | 18 | | 1.7341 | *2,1009* | *2,8784* | *3,922* |
| 4 | | 2.1318 | *2,7764* | *4,6041* | *8,610* | 19 | | 1.7291 | *2,0930* | *2,8609* | *3,883* |
| 5 | | 2.0150 | *2,5706* | *4,0321* | *6,869* | 20 | | 1.7247 | *2,0860* | *2,8453* | *3,850* |
| 6 | | 1.9432 | *2,4469* | *3,7074* | *5,959* | 21 | | 1.7207 | *2,0796* | *2,8314* | *3,819* |
| 7 | | 1.8946 | *2,3646* | *3,4995* | *5,408* | 22 | | 1.7171 | *2,0739* | *2,8188* | *3,792* |
| 8 | | 1.8595 | *2,3060* | *3,3554* | *5,041* | 23 | | 1.7139 | *2,0687* | *2,8073* | *3,767* |
| 9 | | 1.8331 | *2,2622* | *3,2498* | *4,781* | 24 | | 1.7109 | *2,0639* | *2,7969* | *3,745* |
| 10 | | 1.8125 | *2,2281* | *3,1693* | *4,587* | 25 | | 1.7081 | *2,0595* | *2,7874* | *3,725* |
| 11 | | 1.7959 | *2,2010* | *3,1058* | *4,437* | 26 | | 1.7056 | *2.0555* | *2,7787* | *3,707* |
| 12 | | 1.7823 | *2,1788* | *3,0545* | *4,318* | 27 | | 1.7033 | *2,0518* | *2,7707* | *3,690* |
| 13 | | 1.7709 | *2,1604* | *3,0123* | *4,221* | 28 | | 1.7011 | *2,0484* | *2,7633* | *3,674* |
| 14 | | 1.7613 | *2,1448* | *2,9768* | *4,140* | 29 | | 1.6991 | *2,0452* | *2,7564* | *3,659* |
| 15 | | 1.7531 | *2,1315* | *2,9467* | *4,073* | 30 | | *1.6973* | *2,0423* | *2,7500* | *3,646* |
| | | | | | | ... | | ... | ... | ... | ... |
| | | | | | | 200 | | *1.6525* | *1.9792* | *2.6066* | *3.3398* |

Tabelle 2 t-Tabelle, Ausschnitt der Tabelle aus Keller,F. Statistik für naturwissenschaftliche Berufe, pmi-Verlag Frankfurt/M 1993, vergriffen

1. Umformen von KW in IW

KW $\Rightarrow$ IW $\Rightarrow$ IW

$1-\alpha$ $\alpha$ $\alpha$

95% 5% 0,05 in dieser Form steht die IW in der Tabelle.

2. Ermittlung des Freiheitsgrads [$\nu$]

$\nu = n-1$

$\nu = 21-1 = 20$

## Zweiseitige und einseitige Fragestellung

In der ersten Zeile der ersten Spalte steht 2P, in der zweiten P. Die rechts von 2P stehenden Irrtumswahrscheinlichkeiten gelten für zweiseitige Fragestellung. Die rechts von P stehenden für einseitige Fragestellung. Zweiseitige Fragestellung liegt vor, wenn wir nach einem geschlossenen Intervall fragen, wie in Beispiel 3. Wir wollen wissen, welches links und rechts auf der Abszisse die Intervallgrenzen sind, innerhalb derer der Erwartungswert $\mu$ liegt.

Einseitige Fragestellung: Wenn wir dagegen nur den unteren Grenzwert suchen, den der Erwartungswert $\mu$ nicht unterschreitet oder nur den oberen Grenzwert, den der Erwartungswert $\mu$ nicht überschreitet, dann haben wir eine einseitige Fragestellung. In beiden Fällen ist dann das Konfidenzintervall an der anderen Seite offen.

***Zweiseitige Frage***

In Beispiel 3 haben wir also eine zweiseitige Frage. Wir suchen in der Tabelle hinter 2P der Wert 0,05 und unter $\nu$ den Wert 20. In dem entsprechenden Tabellenfeld finden wir t = 2,0860. Dies ist der Faktor zur Berechnung des Konfidenzintervalls für 5%ige Irrtumswahrscheinlichkeit und $\nu$ = 20.

## 10.2.1 Berechnung des Konfidenzintervalls

nach $KI = \bar{x} \pm t_{v;\alpha} * s_{\bar{x}}$

Also

$$\mathbf{KI = \bar{x} \pm t_{v;\alpha} * s_{\bar{x}}}$$
$$\mathbf{KI = \bar{x} \pm t_{20;0,05} * s_{\bar{x}}}$$
$$KI = 6,79 \pm 2,0860 * 0,65$$
$$KI = 6,79 \pm 1,356$$
$$\underline{KI = 5,43 \text{ bis } 8,15}$$

Ergebnis: Der Erwartungswert $\mu$ für die $\alpha$2-Gobuline liegt mit der Konfidenzwahrscheinlichkeit 95% im Konfidenzintervall 5,43% bis 8,15%.

Oder: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Konfidenzintervall in dem Sinne richtig ist, als dass es den Erwartungswert enthält, ist 95%.

Die weiteren Konfidenzintervalle sind für KW 99% KI = 4,94 bis 8,64
und für KW 99,9% KI = 4,29 bis 9,29

Auch hier sehen wir:

Mit steigender Konfidenzwahrscheinlichkeit steigt die Breite des Konfidenzintervalls

$$KW\Uparrow \;\Rightarrow\; KI\Uparrow$$

Sichere Aussagen sind unscharf

## 10.2.2 Berechnung der Konfidenzwahrscheinlichkeit

nach $KW\,[\bar{x} - t_{v;\alpha/2} * s_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{v;\alpha/2} * s_{\bar{x}}] = 1-\alpha$

Wir kommen zum gleichen Ergebnis wie bei 10.2.1, wenn wir die Berechnung nach folgenden Überlegungen durchführen.

Das Intervall $KI = \bar{x} \pm \underline{t * s_{\bar{x}}}$

können wir auch so darstellen:

$$[\bar{x} - 1,356 \;;\; \bar{x} + 1,356]$$
$$\downarrow$$
$$[\bar{x} - 2,0860 * s_{\bar{x}} \;;\; \bar{x} + 2,0860 * s_{\bar{x}}]$$
$$\downarrow$$
$$[\bar{x} - t_{v=20;\alpha=0,025} * s_{\bar{x}} \;;\; \bar{x} + t_{v=20;\alpha=0,025} * s_{\bar{x}}]$$

Allgemeine Formulierung $KW\,[\bar{x} - t_{v;\alpha/2} * s_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{v;\alpha/2} * s_{\bar{x}}] = 1-\alpha$

Das bedeutet: Für die KW 1-$\alpha$ gilt: $\mu$ ist größer oder gleich dem unteren Grenzwert ($\bar{x} - t_{v;\alpha/2} * s_{\bar{x}}$) des Intervalls <u>und</u> kleiner oder gleich dessen oberem Grenzwert ($\bar{x} + t_{v;\alpha/2} * s_{\bar{x}}$). Wie bei Abb.1 erklärt, müssen wir $t_v$ für $\alpha/2$ statt für $\alpha$ aufsuchen.

***Zweiseitige Frage***
Wir wollen das KI in Beispiel 3 für die KW 95% über die folgende Ungleichung berechnen.

$KW\,[\bar{x} - t_{v;\alpha/2} * s_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{v;\alpha/2} * s_{\bar{x}}] = 1\text{-}\alpha$
$KW\,[\bar{x} - t_{20;0,025} * s_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{20;0,025} * s_{\bar{x}}] = 0{,}95$
$KW\,[\bar{x} - 2{,}0860 * 0{,}65 \leq \mu \leq \bar{x} + 2{,}0860 * 0{,}65] = 0{,}95$ $\alpha/2$ bei P ablesen, $\alpha/2$ gilt zweiseitig.
$KW\,[6{,}79 - 1{,}356 \leq \mu \leq 6{,}79 + 1{,}356] = 0{,}95$
$\underline{KW\,[5{,}43 \leq \mu \leq 8{,}15] = 0{,}95}$

Für KW 99% gilt:
$KW\,[\bar{x} - t_{v;\alpha/2} * s_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{v;\alpha/2} * s_{\bar{x}}] = 0{,}99$
$KW\,[\bar{x} - t_{20;0,025} * s_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{20;0,025} * s_{\bar{x}}] = 0{,}99$
$\underline{KW\,[4{,}94 \leq \mu \leq 8{,}64] = 0{,}99}$

Die Ergebnisse entsprechen denen von 10.2.1.

***Einseitige Frage***
Bei einer einseitigen Fragestellung gilt, wenn der untere Grenzwert interessiert: $\bar{x} - t_{v;\alpha} * s_{\bar{x}} \leq \mu$.
Wenn der obere Grenzwert interessiert $\bar{x} + t_{v;\alpha} * s_{\bar{x}} \geq \mu$.
Wie groß ist in Beispiel 3 die untere Intervallgrenze für $\alpha$2-Globuline, die vom Erwartungswert $\mu$ mit der KW = 95% nicht unterschritten wird?

Es gilt: $\bar{x} - t_{v;\alpha} * s_{\bar{x}} \leq \mu$

Das bedeutet: Der Erwartungswert $\mu$ entspricht mindestens dem Wert $\bar{x} - t_{v;\alpha} * s_{\bar{x}}$, er unterschreitet diese untere Intervallgrenze nicht.

Wichtig: t muss für $\alpha$ und nicht für $\alpha/2$ ermittelt werden.

Begründung: Da bei der einseitigen Fragestellung das Intervall oben offen ist, muss der Wert für $\alpha$ am linken Ende eingetragen werden.

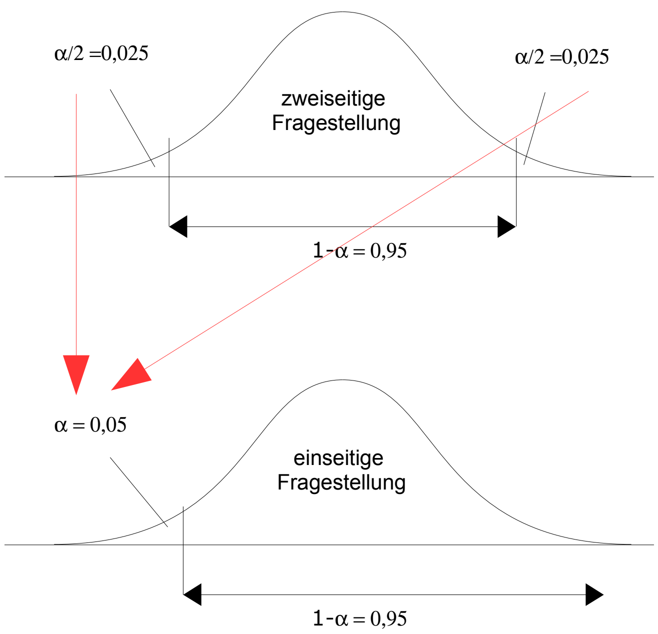


Abb. 5

Nach gilt nun
$\bar{x} - t_{v;\alpha} * s_{\bar{x}} \leq \mu$
$\bar{x} - t_{20;0,05} * s_{\bar{x}} \leq \mu$
$t_{20;0,05} = 1{,}7247$ (bei P ablesen, wir fragen einseitig)
$6{,}79 - 1{,}7247 * 0{,}65 \leq \mu$
$4{,}51 - 1{,}1211 \leq \mu$
$\mathbf{5{,}67 \leq \mu}$

**Ergebnis:** Der Grenzwert 5,67% wird vom Erwartungswert mit der KW 95% nicht unterschritten. Der Erwartungswert ist nicht kleiner als 5,67.

## 10.3 Berechnung der notwendigen Stichprobengröße für ein vorgewähltes Konfidenzintervall

Zur Berechnung eines Konfidenzintervalls waren in den Beispielen die Konfidenzwahrscheinlichkeit und die Stichprobengröße vorgegeben. Wenn uns ein resultierendes Konfidenzintervall zu groß ist und damit das Ergebnis zu unscharf, dann können wir zwei Wege gehen, um ein engeres Konfidenzintervall zu erhalten.

1. Wir können die Konfidenzwahrscheinlichkeit niedriger ansetzen. Statt KW = 95% etwa KW = 90%. Die Folge ist zwar ein engeres Konfidenzintervall aber auch eine unsicherere Aussage.
2. Wir können bei gleichbleibender Konfidenzwahrscheinlichkeit den Umfang der Stichprobe vergrößern. Das führt zu einem engeren Konfidenzbereich bei der ursprünglichen Konfidenzwahrscheinlichkeit.

Wir verwenden für die folgende Berechnung die Daten von **Beispiel 3**:

Für die $\alpha 2$-Globulinfraktion wissen wir:

$\bar{x}$ = 6,79%
$s_x$ = 3%
KW = 95%
KI= 5,43 bis 8,15
n = 21
t = 2,086

Es ist unmittelbar einsichtig, dass die Differenz $\Delta$ = (5,43 – 8,15) = |2,72| mit steigendem Stichprobenumfang kleiner wird, da größere Stichproben sicherere Daten und damit ein engeres, aussagekräftigeres Konfidenzintervall zur Folge haben. Wir fordern jetzt ein Konfidenzintervall mit der willkürlich gewählten Differenz $\Delta$ = 2,0 bei der Konfidenzwahrscheinlichkeit 95% und berechnen wie groß die Stichprobe dazu sein müsste.

Die Differenz, um die es hier geht, berechnen wir nach

$KI = \bar{x} \pm t * s_{\bar{x}}$

In Beispiel 3 gilt für KW = 95% und n = 21 $KI = 6{,}79 \pm 1{,}356$ (siehe Rechnung bei Beispiel 3)

$KI = 5{,}43$ bis $8{,}15$

Die Differenz $\Delta$ der beiden Grenzwerte ergibt sich aus

$\Delta = 2 * t * s_{\bar{x}}$ (die 2 resultiert aus dem ±)
$\Delta = 2 * t * s_x/\sqrt{n}$
$\Delta = 2 * 2{,}0860 * 3/\sqrt{21}$
$\Delta = 4{,}172 * 0{,}654$
$\Delta = 2{,}73$ (Rundungsfehler sind hier unbedeutend)

**Berechnung von n**

$$\boxed{\Delta = 2 * t * s_x/\sqrt{n}}$$

Um die für $\Delta$ = 2,0 notwendige Stichprobengröße zu ermitteln, müssen wir die Gleichung nach n umstellen, daher die Umformung von $s_{\bar{x}}$ nach $s_x/\sqrt{n}$.

$\Delta * \sqrt{n} = 2 * t * s_x$
$\sqrt{n} = (2 * t * s_x)/\Delta$
$n = [(2t)^2 * s_x^2]/\Delta^2$
$n = [4{,}172 * 9]/4$
$\underline{n = 39{,}16}$

<u>Die notwendige Stichprobengröße ist gerundet n = 39</u>

Wir wollen nun prüfen, ob die Rechnung stimmt.
Da sich der Stichprobenumfang von 21 auf 39 erhöht hat, müssen für die Prüfrechnung zwei Werte neu ermittelt werde:

1. $t_{38;0,05}$ = 2,0244, dieser Wert ist der vorliegenden t-Tabelle nicht zu entnehmen. Er entstammt der Tabelle in der Documenta Geigy.
2. $s_{\bar{x}}$ = 0,48, dieser Wert musste neu berechnet werden, da sich n von 21 auf 39 verändert hat.

$$KI = \bar{x} \pm t_{38;0,05} * s_{\bar{x}}$$
$$KI = 6,79 \pm 2,0244 * 0,48$$
$$KI = 6,79 \pm 0,97$$
$$\underline{KI = 5,82 \text{ bis } 7,76}$$
$$\Delta = 5,82 - 7,76 = |1,94|$$

Das Ergebnis $\Delta$ = 1,94 stimmt nicht exakt mit der Vorgabe $\Delta$ = 2,0 überein. Der Unterschied ist auf Rundungsfehler und darauf zurückzuführen, dass wir das errechnete n = 39,16 auf 39 runden mussten.

# 10.4 Übungen

**Übung 1** Die photometrische Analyse von 10 Humanseren ergab folgende „Kalium-Werte“ im mmo/L: 3,7; 5,3; 4,1; 4,2; 4,5; 5,0; 5,1; 3,9; 4,3; 5,0. $\bar{x}$ = 4,51; $s_{\bar{x}}$ = 0,18. Wir setzen voraus, dass die Daten zumindest approximiert normalverteilt sind.
Welcher Grenzwert wird vom Erwartungswert mit der KW 0,95% nicht überschritten?

**Übung 2** Untersuchen Sie an den Daten von Beispiel 3 bei gleichbleibenden Werten für KW, $\bar{x}$ und $s_x^2$ den Einfluss der Stichprobengröße.

**Übung 3** Ein fiktives Beispiel: Von einem Saatgut liegt uns eine Stichprobe mit n = 24 vor. Das arithmetische Mittel der Körnermassen beträgt $\bar{x}$ = 0,389 mg, $s_x^2$ = 0,014.
Wie groß müsste n sein, damit das Konfidenzintervall = 0,339 bis 0,439 resultiert.

Lösung Übung 1: $t_{9;0,05}$ = 1,8331, oberer Grenzwert: = 4,84 mmol/L. Übung 2: z.B. n = 10 $\Rightarrow$ t = 2,2622; KI = 5,32 bis 8,26, n = 20 $\Rightarrow$ t = 2,0930; KI = 5,43 bis 8,15, n = 30 $\Rightarrow$ t = 2,0452; KI = 5,46 bis 8,12. Mit steigendem n wird das KI enger, die Aussage bei gleicher KW also präziser. Das war zu vermuten, da größere Stichproben sicherere Daten liefert. Übung 3: $t_{23;0,05}$ = 2,0687, $t_{95;0,05}$ = 1,9853 (t-Tabelle aus Documenta Geigy), n = 95,8 runden zu 96.